III. Algebre di Lie semisemplici

Avvertenza : In questo capitolo, salvo esplicito avviso contrario, si suppone sempre che le algebre di Lie di cui si tratta sono definite su un campo F *algebricamente chiuso di caratteristica zero.*

1. Decomposizione di Jordan-Chevalley di un'applicazione lineare

In questo paragrafo, salvo avviso contrario, V è uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso F *di caratteristica qualsiasi*, e x è un qualsiasi endomorfismo di V.

Vogliamo ottenere una versione conveniente della ben nota riduzione a *forma canonica di Jordan* dell'endomorfismo x. Ricordiamo che tale riduzione corrisponde a una scelta di base in V rispetto alla quale la matrice rappresentativa di x è somma diagonale di *blocchi di Jordan*, cioè di matrici quadrate della forma:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & & & 0 \\ & a & 1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a & 1 \\ 0 & & & & a \end{bmatrix}.$$

Poichè diag(a , . . . , a) commuta con la matrice nilpotente $(t_{i\,j})$ con $t_{i\,,\,i+1} = 1$ e zero altrove, segue in particolare che la matrice di x è somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente fra loro permutabili.

Introduciamo, innanzitutto, la nozione di endomorfismo semisemplice, e proviamo alcuni fatti elementari sugli endomorfismi semisemplici, che ci serviranno anche nel seguito.

Definizione 1. *Un endomorfismo x di V si dice* **semisemplice** *sse x è diagonalizzabile.* (Ricordiamo che, per un ben noto risultato di algebra lineare, ciò equivale a dire che il polinomio minimo di x su F si spezza in fattori lineari a due a due distinti, ovvero che ogni autovalore di x è una radice semplice del polinomio minimo.)

Lemma 1. *Sia $x \in End(V)$ semisemplice, e sia U un sottospazio x-invariante di V. Allora $x_{|U}$ è semisemplice.*

Dim. Per induzione sulla codimensione di U. Poichè x è semisemplice su V, l'asserto è vero se codim U = 0. Sia dunque codim U > 0, e sia $v \in V-U$ un autovettore di x. Allora il sottospazio $W = U+\langle v\rangle$ è x-invariante , e per l'ipotesi induttiva $x_{|W}$ è semisemplice. Sia $(v , v_1 , \dots , v_r)$ una base di W formata da autovettori di $x_{|W}$, e sia $v_i = u_i + \xi_i v$ ($u_i \in U$, $1 \le i \le r$). Se v ha autovalore λ e v_i ha autovalore λ_i , si ha: $x(v_i) = \lambda_i v_i = \lambda_i u_i + \lambda_i \xi_i v = x(u_i) + \lambda\xi_i v$. Segue subito $x(u_i) = \lambda_i u_i$, e quindi u_i è un autovettore di $x_{|U}$. D'altra parte, come si verifica facilmente, gli u_i sono indipendenti. Si conclude che U ha una base di autovettori per $x_{|U}$, ovvero $x_{|U}$ è semisemplice.

Proposizione 1. *Sia S una collezione di endomorfismi semisemplici di V che commutano fra loro. Allora V ha una base costituita da autovettori comuni a tutti gli elementi di S (in altre parole, S è* ***simultaneamente diagonalizzabile*** *).*

Dim. Per induzione su n = dim V.
Se n = 1, l'asserto è banale. Sia dunque n > 1, e si supponga che S contenga un elemento x con almeno due autovalori distinti. Sia λ un autovalore di x, e sia E_λ il corrispondente autospazio. Essendo x semisemplice, $V = E_\lambda \oplus E'$, ove E' denota la somma diretta degli autospazi di x relativi agli autovalori diversi da λ , e per l'ipotesi

su x $\dim E_\lambda < n$ e $\dim E' < n$. Notiamo ora che, se y è un qualunque endomorfismo di V che commuta con x, ed E_μ è un qualunque autospazio di x, per ogni $v \in E_\mu$ si ha : $x(yv) = y(xv) = y(\mu v) = \mu(yv)$, ovvero E_μ è y-invariante. Ciò implica che i sottospazi E_λ e E' sono S-invarianti. Se allora denotiamo con $S|_{E\lambda}$ e con $S|_{E'}$, rispettivamente la collezione delle restrizioni degli elementi di S a E_λ e la collezione delle restrizioni degli elementi di S a E', poichè evidentemente $S|_{E\lambda}$ e $S|_{E'}$ sono costituite da endomorfismi che commutano fra loro, e sono semisemplici per il Lemma 1, segue per l'ipotesi induttiva che esistono una base $\underline{b}$ di E_λ formata da autovettori comuni agli elementi di $S|_{E\lambda}$, e una base $\underline{c}$ di E' formata da autovettori comuni agli elementi di $S|_{E'}$. Chiaramente, $\underline{b} \cup \underline{c}$ è una base di V formata da autovettori comuni a tutti gli elementi di S.
Resta il caso in cui ogni endomorfismo di S ha un unico autovalore. Ma allora tutti gli elementi di S, essendo semisemplici, sono scalari, e l'asserto è
banale.

Come abbiamo già avuto occasione di osservare (cfr. I.5.), applicando la formula binomiale è facile verificare che, se $x,y \in End(V)$ sono nilpotenti e commutano fra loro, allora anche $x \pm y$ è nilpotente. La Proposizione precedente assicura che ciò è vero anche quando x e y sono semisemplici:

Corollario 1. *Siano x,y endomorfismi semisemplici di V che commutano fra loro . Allora anche* $x \pm y$ *è semisemplice.*

Dim. Per la Proposizione 1, x e y sono simultaneamente diagonalizzabili, i.e. vi è in V una base di autovettori comuni a x e y. Rispetto a tale base x e y, e dunque anche $x \pm y$, sono rappresentati da matrici diagonali.

La versione della decomposizione di Jordan di cui abbiamo bisogno è espressa dal seguente :

Teorema 1. *Sia* $x \in End(V)$. *Allora:*
i) x ammette una e una sola decomposizione della forma $x = x_s + x_n$ *, dove* x_s *è semisemplice,* x_n *è nilpotente,* x_s *e* x_n *commutano fra loro.*
ii) Esistono dei polinomi $p(t), q(t) \in F[t]$ *, privi di termine noto, tali che* $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. *In particolare,* x_s *e* x_n *commutano con ogni endomorfismo di V che commuta con x.*
iii) Se A, B sono sottospazi di V tali che $A \subseteq B$, *e* $x(B) \subseteq A$ *, allora anche* $x_s(B) \subseteq A$ *e* $x_n(B) \subseteq A$.

Alla dimostrazione premettiamo due lemmi :

Lemma 2. *Sia* $x \in End(V)$, *e siano* $f(t), g(t) \in F[t]$ *polinomi coprimi tali che* $f(x)g(x) = 0$. *Allora* $V = Ker(f(x)) \oplus Ker(g(x))$.

Dim. Notiamo che $g(x)(V) \subseteq Ker(f(x))$, $f(x)(V) \subseteq Ker(g(x))$. Poichè f(t) e g(t) sono coprimi, vi sono dei polinomi $a(t), b(t) \in F[t]$ tali che $1 = g(x)a(x) + f(x)b(x)$. Segue che $V = [g(x)a(x) + f(x)b(x)]V \subseteq Ker(f(x)) + Ker(g(x))$. Sia ora $v \in Ker(f(x)) \cap Ker(g(x))$. Allora $v = 1v = a(x)g(x)v + b(x)f(x)v = a(x)\cdot 0 + b(x)\cdot 0 = 0$.

Lemma 3. *Sia* $x \in End(V)$, *e siano* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *(con molteplicità* $m_1, \ldots, m_k$*) gli autovalori distinti di x, così che il polinomio caratteristico di x è* $\phi(t) = \prod(t - \alpha_i)^{mi}$. *Per ogni* $i = 1, \ldots, k$, $V_i = ker(x - \alpha_i)^{mi}$ *è x-invariante, il polinomio caratteristico di* $x|_{Vi}$ *è* $(t- \alpha_i)^{mi}$, *e* $V = \oplus V_i$.

Dim. E' chiaro che ogni V_i è x-invariante. Procediamo per induzione su k. Se $k = 1$, $\phi(t) = (t - \alpha_1)^n$, e poichè $0 = \phi(x) = (x - \alpha_1)^n$ per il Teorema di Hamilton-Cayley, $V = V_1$. Se $k > 1$, sia $f(t) = (t - \alpha_1)^{m1}$, $g(t) = \prod_{i>1}(t - \alpha_i)^{mi}$. In forza del Lemma 2. $V = Ker(f(x)) \oplus Ker(g(x)) = V_1 \oplus Ker(g(x))$. Posto $W = Ker(g(x))$, si vede subito che,essendo V_1 e W entrambi x-invarianti, il polinomio caratteristico di $x|_{V1}$ è f(t), e il polinomio caratteristico di $x|_W$ è g(t). Con ciò resta anche provato che, per ogni i, $\dim V_i = m_i$ e $(t- \alpha_i)^{mi}$ è il polinomio caratteristico di $x|_{Vi}$. Ora, per l'ipotesi induttiva applicata a $x|_W$, $W = \oplus_{i>1}Ker(x|_W - \alpha_i)^{mi}$. Ma poichè $Ker(x - \alpha_i)^{mi} \subseteq Ker(g(x)) = W$, segue subito $Ker(x|_W - \alpha_i)^{mi} = Ker(x - \alpha_i)^{mi} = V_i$, donde la tesi.

Dim. del Teorema 1. (J.P. Serre) Si assumano le ipotesi e le notazioni del Lemma 3, così che per ogni i, $x|_{V_i}$ ha polinomio caratteristico $(t-\alpha_i)^{m_i}$. Si considerino le congruenze: $p(t) \equiv \alpha_i \pmod{(t-\alpha_i)^{m_i}}$ $(1 \le i \le k)$, alle quali si aggiunga la congruenza $p(t) \equiv 0 \pmod{t}$ se x non ha l'autovalore nullo. Il teorema cinese del resto assicura che esiste un polinomio $p(t) \in F[t]$ soddisfacente le congruenze sopra elencate. Sia $q(t) = t - p(t)$. E' chiaro che p(t) e q(t) hanno entrambi termine noto nullo.
Poniamo ora $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$. Poichè x_s e x_n sono dei polinomi in x, essi commutano fra loro, e commutano altresì con ogni endomorfismo di V che commuti con x. Inoltre, ogni sottospazio di V che sia x-invariante, e anche x_s- e x_n-invariante. In particolare, ogni $V_i = \mathrm{Ker}(x-\alpha_i)^{m_i}$ è x_s- e x_n-invariante, e poichè $p(x) \equiv \alpha_i \pmod{(x-\alpha_i)^{m_i}}$, ne segue che $(x_s - \alpha_i)|_{V_i} = 0$, ovvero che $x_s|_{V_i}$ è scalare con autovalore α_i. Si conclude che x_s è semisemplice. D'altra parte $x_n = x - x_s$. Poichè $x|_{V_i}$ e $x_s|_{V_i}$ hanno lo stesso autovalore α_i, segue che $x_n|_{V_i}$ ha tutti gli autovalori uguali a zero (essendo $\det(x_n|_{V_i} - tI) = \det(x|_{V_i} - (t+\alpha_i)I)$). Dunque x_n è nilpotente, e i) e ii) sono provati, salvo l'unicità della decomposizione. Quanto a iii), basta osservare che x_s e x_n sono dei polinomi in x con termine noto nullo.
Supponiamo infine che $x = s + n$ sia un'altra decomposizione di x, con s semisemplice e n nilpotente fra loro permutabili. Allora s e n commutano con x, e quindi, in forza di ii), anche con x_s e x_n. Ne segue che $x_s - s$ è semisemplice (Corollario 1), e $x_n - n$ è nilpotente. Poichè $x_s - s = x_n - n$, e l'unico endomorfismo di V ad un tempo semisemplice e nilpotente è l'endomorfismo nullo, si conclude che $x_s = s$ e $x_n = n$.

Definizione 2. *La decomposizione $x = x_s + x_n$ di un endomorfismo x di V descritta in Teor. 1 si dice* **decomposizione di Jordan-Chevalley** *(o più semplicemente, decomposizione di Jordan) di x. Si dice che x_s è la* **parte semisemplice**, *e che x_n è la* **parte nilpotente** *di x.*

Abbiamo già visto che, se x è un endomorfismo nilpotente di V, ad x è un endomorfismo nilpotente di End(V) (I.5.,Teorema 1). Proviamo che lo stesso risultato vale per x semisemplice :

Lemma 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo arbitrario F, e sia $x \in End(V)$ un endomorfismo semisemplice. Allora anche ad x è semisemplice.*

Dim. Sia $\underline{b} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base di V tale che $M_{\underline{b}}(x) = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, e sia (e_{ij}) la base standard di gl(V) relativa a $\underline{b}$, i.e. $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk} v_i$. Si ha allora : $(\mathrm{ad}\, x)(e_{ij}) = [x, e_{ij}] = xe_{ij} - e_{ij}x = a_i e_{ij} - a_j e_{ij} = (a_i - a_j)e_{ij}$. Dunque ad x ha matrice diagonale rispetto alla base standard relativa a $\underline{b}$.

Una prima conseguenza del Teorema 1 è il seguente:

Corollario 2. *Sia $x \in End(V)$, e sia $x = x_s + x_n$ la sua decomposizione di Jordan. Allora $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x_s + \mathrm{ad}\, x_n$ è la decomposizione di Jordan di ad x in End(End(V)).*

Dim. Sappiamo che ad x_s è semisemplice per il Lemma 4, e che ad x_n è nilpotente (I.4.Teor.1). D'altra parte $[\mathrm{ad}\, x_s, \mathrm{ad}\, x_n] = \mathrm{ad}\,[x_s, x_n] = \mathrm{ad}\, 0 = 0$. Dunque ad x_s e ad x_n commutano, e si ha l'asserto.

Per dedurre un'altra utile conseguenza del Teorema 1, conviene descrivere in modo leggermente diverso i sottospazi V_i introdotti nel Lemma 3.

Sia dunque $x \in \mathrm{End}(V)$, e sia $x = x_s + x_n$ la sua decomposizione di Jordan. Abbiamo visto che, se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sono gli autovalori distinti di x (con molteplicità $m_1, \ldots, m_k$) e, per ogni $i = 1, \ldots, k$, $V_i = \ker(x - \alpha_i)^{m_i}$, si ha $V = \oplus V_i$, con $\dim V_i = m_i$. Inoltre, per ogni i, V_i è x-, e quindi anche x_s-invariante, e x_s opera su V_i come lo scalare α_i.
Per ogni $a \in F$, definiamo $V_a = \{v \in V \mid (x - aI)^r v = 0$, per qualche r dipendente da v$\}$.
Si vede subito che V_a è un sottospazio di V. Sia $(v_1, \ldots, v_s)$ una base di V_a, e $(x - aI)^{r_j} v_j = 0$ $(j = 1, \ldots, s)$. Allora, posto $R = \max\{r_j\}$, si ha evidentemente $(x - aI)^R v = 0$ per ogni $v \in V_a$. Pertanto $V_a \subseteq \mathrm{Ker}(x - aI)^R$, e ciò implica $V_a = \mathrm{Ker}(x - aI)^R$. Dunque V_a è x-invariante e, se $V_a \neq \underline{0}$, x ha su V_a l'unico autovalore a. In tal caso, $a = \alpha_i$ per qualche $i = 1, \ldots, k$. D'altra parte, per la definizione stessa di V_i, è $V_i \subseteq V_{\alpha_i}$. E poichè $\dim V_i = m_i$ (molteplicità dell'autovalore α_i), necessariamente $V_i = V_{\alpha_i}$.

In particolare, possiamo concludere che $V = \oplus V_a$, ove a è un autovalore di x (e x_s), e x_s opera su V_a come lo scalare a.

Supponiamo ora che sia $V = A$ un'algebra finito-dimensionale sul campo F, che F sia di caratteristica zero, e che $x = \delta$ sia una derivazione di A. Allora :

Lemma 5. *Per ogni $a,b \in F$, $A_a A_b \subsetneq A_{a+b}$.*

Dim. L'asserto segue dalla validità della seguente formula : $\forall\, n > 0$, $\forall\, u,v \in A$

$$(\delta - (a+b)I)^n(uv) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(\delta - aI)^{n-i}(u)((\delta - bI)^i(v).$$

Per induzione su n :

Se $n = 1$: $(\delta - (a+b)I)(uv) = \delta(uv) - ((a+b)I)(uv) = (\delta u)v + u(\delta v) - a(uv) - b(uv) = ((\delta - aI)u)v + u((\delta - bI)v)$.

Se $n > 1$: $(\delta - (a+b)I)^n(uv) = (\delta - (a+b)I)\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(\delta - aI)^{n-1-i}(u)((\delta - bI)^i(v) = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\{(\delta - aI)^{n-i}(u)((\delta - bI)^i(v) + (\delta - aI)^{n-(1+i)}(u)((\delta - bI)^{i+1}(v)\} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(\delta - aI)^{n-i}(u)((\delta - bI)^i(v) + \sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}(\delta - aI)^{n-j}(u)((\delta - bI)^j(v) = (\delta - aI)^n u(\delta - bI)^0 v + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j}(\delta - aI)^{n-j}(u)((\delta - bI)^j(v) + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n-1}{j-1}(\delta - aI)^{n-j}(u)((\delta - bI)^j(v) + (\delta - aI)^0(u)((\delta - bI)^n(v) = (\delta - aI)^n(u)(\delta - bI)^0(v) + \sum_{j=1}^{n-1}\binom{n}{j}(\delta - aI)^{n-j}(u)((\delta - bI)^j(v) + (\delta - aI)^0(u)((\delta - bI)^n(v) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(\delta - aI)^{n-j}(u)((\delta - bI)^j(v)$ (si tenga conto che $\binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} = \binom{n}{j}$).

Dopo di ciò, se $(\delta - aI)^r u = 0$, $(\delta - bI)^s v = 0$, basta prendere $n = r + s$ per avere $(\delta - (a+b)I)^n(uv) = 0$, i.e. $uv \in A_{a+b}$.

Siamo ora in grado di provare la seguente :

Proposizione 2. *Sia A un'algebra di dimensione finita su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora l'algebra delle derivazioni $Der(A)$ ($\subseteq End(A)$) contiene le parti semisemplici e nilpotenti di tutti i suoi elementi. (Ovvero : la parte semisemplice e la parte nilpotente di una derivazione sono anch'esse derivazioni.)*

Dim. Sia $\delta \in Der(A)$, e sia $\delta = \sigma + \nu$ la sua decomposizione di Jordan. Ovviamente, ci basta provare che ad es. $\sigma \in Der(A)$. Consideriamo la decomposizione $A = \oplus A_a$ relativa alla derivazione δ. Notiamo che, se $a,b \in F$, $u \in A_a$, $v \in A_b$, è $\sigma(uv) = (a+b)uv$ (poichè $uv \in A_{a+b}$, eventualmente $= \underline{0}$). D'altronde $\sigma(u)v + u\sigma(v) = (au)v + u(bv) = (a+b)uv$. Dunque $\sigma(uv) = \sigma(u)v + u\sigma(v)$. Poichè $A = \oplus A_a$, $a \in Spec(\delta)$, si conclude che σ è una derivazione di A.

2. Il criterio di Cartan

In questo paragrafo proveremo un utile criterio per la risolubilità di un'algebra di Lie. La dimostrazione si basa sul seguente:

Lemma 1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su F, e siano A,B due sottospazi dell'algebra generale lineare $gl(V)$, con $A \subseteq B$. Si ponga $M = \{x \in gl(V) \mid (ad\, x)(B) \subseteq A\}$. Se $x \in M$ è tale che $Tr(xy) = 0$ per ogni $y \in M$, allora x è nilpotente.*

Dim. Sia $x = x_s + x_n$ la decomposizione di Jordan di x. Con le notazioni introdotte in 1. Lemma 3, $V = \oplus V_i$, $x_s|_{V_i}$ è scalare, e in ciascun V_i si può scegliere una base $\underline{b}_i$ rispetto alla quale $x_n|_{V_i}$ è rappresentato da una matrice nilpotente triangolare alta (II.1.Cor.2). Si scelga in V la base $\underline{b} = \underline{b}_1 \cup \ldots \cup \underline{b}_k$, e sia diag$(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice di x_s rispetto alla base $\underline{b}$. Si consideri F come spazio vettoriale sul suo sottocampo primo **Q**, e sia E il sottospazio di F generato dagli autovalori $a_1, \ldots, a_n$. Si tratta di provare che $x_s = 0$, ovvero che $E = \underline{0}$, ovvero ancora che il duale $E^* = \underline{0}$.
Sia dunque $f \in E^*$, e sia y l'elemento di gl(V) tale che $M_{\underline{b}}(y) = \mathrm{diag}(f(a_1), \ldots, f(a_n))$. Come si è visto poco sopra (in 1. Lemma 4), se (e_{ij}) è la base standard di gl(V) risp. a $\underline{b}$, si ha $ad\, x_s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$, e $ad\, y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$. La formula d'interpolazione di Lagrange assicura l'esistenza di un polinomio $g(t) \in F[t]$ con termine noto nullo tale che sia per ogni coppia di indici i,j $g(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$. (Si noti che, $a_i - a_j = a_k - a_l$ implica, per la linearità di f, $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$.) Essendo, per ogni r, $(ad\, x_s)^r(e_{ij}) = (a_i - a_j)^r(e_{ij})$, si ha $g(ad\, x_s)(e_{ij}) = g(a_i - a_j)(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))(e_{ij}) = ad\, y(e_{ij})$, ovvero $ad\, y = g(ad\, x_s)$. Poichè $ad\, x_s$ è la parte semisemplice di ad x (1. Corollario 1), si può esprimere come un polinomio in ad x con termine noto nullo (1. Teor.1,ii)). Segue allora che anche $ad\, y = g(ad\, x_s)$ è un polinomio in ad x con termine noto nullo.
Per ipotesi, $(ad\, x)(B) \subseteq A$. Ma allora anche $(ad\, y)(B) \subseteq A$, ovvero $y \in M$. Ora, sempre per ipotesi, $Tr(xy) = 0$. D'altra parte, $Tr(xy) = Tr((x_s + x_n)y) = Tr(x_s y) + Tr(x_n y)$, e $Tr(x_n y) = 0$, come si vede subito considerando le matrici di x_n e y rispetto a $\underline{b}$. Dunque $Tr(x_s y) = \sum a_i f(a_i) = 0$. $\sum a_i f(a_i)$ è una combinazione lineare degli a_i a coefficienti in **Q**, cioè è un elemento di E. Possiamo pertanto applicare a $\sum a_i f(a_i)$ la forma lineare f, ottenendo così $f(\sum a_i f(a_i)) = \sum f(a_i)^2 = 0$. Da cui $f(a_i) = 0$ per ogni i, e quindi, essendo E generato dagli a_i, $f \equiv 0$.

Ci serve anche ricordare l'identità espressa nel seguente :

Lemma 2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano a, b, c endomorfismi di V. Si ha allora :*

$$Tr([a,b]\, c) = Tr(a\, [b,c]) .$$

Dim. $Tr([a,b]\, c) = Tr(abc - bac) = Tr(abc) - Tr(bac) = Tr(abc) - Tr(acb) = Tr(a\, [b,c])$.

Teorema (Criterio di Cartan). *Sia L una sottoalgebra dell'algebra generale lineare $gl(V)$ su uno spazio V di dimensione finita. Se $Tr(xy) = 0$ per ogni $x \in [LL]$, $y \in L$, allora L è risolubile.*

Dim. Proveremo, di fatto, che ogni elemento di [LL] è nilpotente, quindi (cf.I.4) ad-nilpotente, così che per il Teorema di Engel [LL] è nilpotente. Ciò implica ovviamente che L è risolubile.
Applichiamo il Lemma 1 nel caso in cui $A = [LL]$, $B = L$ e dunque $M = \{x \in gl(V) \mid (ad\, x)(L) \subseteq [LL]\}$. Ovviamente L, e a fortiori [LL], è contenuta in M. [LL] è generata dai brackets [xy]. Perciò, se proviamo che, per ogni $z \in M$, si ha $Tr([xy]\, z) = 0$, resta provato che $Tr(az) = 0$ per ogni $a \in [LL]$, e dal Lemma 1 si deduce che a è nilpotente. In forza del Lemma 2, $Tr([xy]\, z) = Tr(x\, [yz]) = Tr([yz]\, x)$. Ora, $[yz] = -[zy] = -(ad\, z)(y) \in [LL]$ per definizione di M. Segue allora per la nostra ipotesi $Tr([yz]\, x) = 0$, e quindi anche $Tr([xy]\, z) = 0$.

Corollario. *Sia L un'algebra di Lie, e si supponga che , per ogni $x \in [LL]$ e per ogni $y \in L$, sia*

$$Tr(ad\,x\; ad\,y) = 0.$$

Allora L è risolubile.

Dim. Per ipotesi, per ogni $x,y,z \in L$ $Tr([ad\,x, ad\,y]\, ad\,z) = Tr(ad\,[xy]\, ad\,z) = 0$. Pertanto, in forza del Criterio di Cartan, ad L è risolubile. D'altronde Ker ad = Z(L) è anch'esso, ovviamente, risolubile. Segue da II.2, Prop.1 che L è risolubile.

3. La forma di Killing

Iniziamo rammentando alcune nozioni e alcuni fatti elementari sulle forme bilineari, che utilizzeremo in questo paragrafo e nel successivo.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo arbitrario F, e sia $f: V \times V \to F$ una *forma bilineare simmetrica* su V (i.e. sia $f(x,y) = f(y,x)$ per ogni $x,y \in V$). Come è ben noto, fissata una base $\underline{b} = (e_1, \ldots, e_n)$ in V, si associa a f la matrice $M_{\underline{b}}(f) = X = (x_{i\,j})$, ove $x_{i\,j} = f(e_i, e_j)$. Diremo che $M_{\underline{b}}(f)$ è la *matrice rappresentativa* di f (rispetto a $\underline{b}$). Come risulta evidente, essa determina completamente f.
Una forma bilineare simmetrica f definisce una relazione di *ortogonalità* fra i vettori dello spazio V : due vettori $u, v \in V$ si dicono *ortogonali* se $f(u,v) = 0$.
Definizione 1. *Sia* $rad\, f = \{u \in V \mid f(u,v) = 0,\ \forall v \in V\}$. *Il sottospazio* $rad\, f$ *(i.e. il sottospazio costituito dai vettori di V ortogonali a ogni vettore di V) è il* **radicale** *della forma f.* f si dice *non-degenere* se rad f = $\underline{0}$, *degenere* in caso contrario.

Si noti che, se $u = \Sigma\, a_j e_j \in V$, è $f(u,e_i) = \Sigma\, a_j f(e_j, e_i) = \Sigma\, a_j x_{j\,i}$. Perciò $u \neq 0$ appartiene a rad f sse il sistema lineare omogeneo $\Sigma\, a_j x_{j\,i} = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ nelle incognite a_j ha soluzioni non-banali, ovvero sse $\det(X) = 0$. In altre parole, *la forma f è non-degenere sse la sua matrice rappresentativa è non-singolare.*

Definizione 2. *Per ogni* $S \subseteq V$, *si ponga* $S^\perp = \{v \in V \mid f(v,s) = 0,\ \forall s \in S\}$.
Diremo che $S^\perp$ *è il* **complemento ortogonale** *(o semplicemente l'* **ortogonale**) *di S.*

Si noti che :
1) $S^\perp$ è un sottospazio di V; $< S >^\perp = S^\perp$.
2) In particolare, $V^\perp$ = rad f.
3) Se $S = \{s\}$, scrivendo $s^\perp$ per $\{s\}^\perp$, si ha : $\dim(s^\perp) = n-1$ se $s \notin$ rad f, mentre $\dim(s^\perp) = n$ se $s \in$ rad f. Ciò segue dal fatto che l'applicazione $s_R : x \to f(x,s)\ \forall x \in V$ è lineare, e $s^\perp = Ker\, s_R$.

Proposizione 1. *Sia f una forma bilineare simmetrica su V, e si supponga f non-degenere. Se U è un sottospazio di V,* $\dim U^\perp = codim\, U$.

Dim. Per induzione su r = dim U. Se r = 0, l'asserto è banale. Sia r > 0. Poichè f è non-degenere, $V - U^\perp \neq \underline{0}$. Sia dunque $0 \neq x \in V - U^\perp$. Poichè $x^\perp$ è un iperpiano di V non contenente U, $x^\perp \cap U = S$ è un iperpiano di U. Per l'ipotesi induttiva, $\dim S^\perp = n - (r-1)$. Sia ora $U = < S,u >$, così che $U^\perp = S^\perp \cap u^\perp$. Per la scelta di x, $x \in S^\perp - U^\perp$. Dunque $x \notin u^\perp$, e quindi $u^\perp$ è un iperpiano di V che non contiene $S^\perp$. Segue che $U^\perp$ è un iperpiano di $S^\perp$, donde $\dim U^\perp = \dim S^\perp - 1 = n - r = codim\, U$.

Si noti che la Proposizione 1 resta valida se f è una qualsiasi forma non-degenere *riflessiva* (i.e. : per $x,y \in V$ $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(y,x) = 0$).

Sia ora L un'algebra di Lie (su un campo F algebricamente chiuso di caratteristica zero), e sia $\phi : L \rightarrow gl(V)$ una sua rappresentazione. Si definisca l'applicazione $\kappa_\phi : L \times L \rightarrow F$ ponendo

$$\kappa_\phi(x,y) = Tr(\phi(x)\phi(y)) \quad \forall\, x,y \in L.$$

Si vede subito che κ_ϕ è una forma bilineare simmetrica su L. (Una tale forma è detta talvolta *forma traccia* (trace form).) Segue altresì dal Lemma 2 del paragrafo precedente che :

$$\kappa_\phi([xy],z) = \kappa_\phi(x,[yz]) \quad \forall\, x,y,z \in L$$

(i.e. la forma κ_ϕ è *associativa*).

Lemma 1. *Sia κ_ϕ una forma traccia su un'algebra di Lie L. Allora :*
i) rad κ_ϕ è un ideale di L ;
ii) *ϕ(rad κ_ϕ) è un ideale risolubile di $\phi(L)$.*

Dim. i) Se $x \in$ rad κ_ϕ, per ogni $y,z \in L$ è $\kappa_\phi([xy],z) = \kappa_\phi(x,[yz]) = 0$, e dunque $[xy] \in$ rad κ_ϕ).
ii) Segue dal criterio di Cartan, osservando che per definizione, è $Tr(\phi(x)\phi(y)) = 0$ per ogni $x \in$ rad κ_ϕ (e in particolare dunque per ogni $x \in$ [rad κ_ϕ ,rad κ_ϕ]) e per ogni $y \in L$.

Un ruolo fondamentale nel seguito è svolto dalla forma traccia definita dalla rappresentazione aggiunta :

Definizione 1. *Sia $\phi = ad$. La forma $\kappa = \kappa_{ad} : L \times L \rightarrow F$ definita da*

$$\kappa(x,y) = Tr(ad\, x\; ad\, y) \quad \forall\, x,y \in L$$

è la **forma di Killing** *di L..*

La forma di Killing è dunque una forma bilineare simmetrica su L, e il suo radicale è, in forza del Lemma 1, un ideale risolubile di L. (Si osservi infatti che ad(rad κ) è un ideale risolubile di ad L, e nell'isomorfismo canonico fra ad L e L/Z(L) a ad(rad κ) corrisponde rad κ/Z(L).)

Allo scopo di dimostrare il classico criterio di Cartan per la semisemplicità di un'algebra di Lie, conviene riformulare la nozione di semisemplicità in forma leggermente diversa:

Osservazione: *Un'algebra di Lie L $\neq \underline{0}$ è semisemplice se e solo se non ha ideali abeliani diversi da zero.* Infatti : 1) se I è un ideale abeliano di L, $I \subseteq$ rad L; pertanto, se L è semisemplice, $I = \underline{0}$; 2) se L non è semisemplice, rad L contiene ideali abeliani di L diversi da zero. Ad es., l'ultimo termine non nullo della serie derivata di rad L. (Per quest'ultimo punto, si osservi che in generale, se J è un qualsiasi ideale di un'algebra di Lie L, i termini della serie derivata di J sono ideali di L. Si noti infatti che per ogni $x,y \in J$ e per ogni $z \in L$ si ha $[z[xy]] = -[x[yz]] - [y[zx]] \in [J\,J]$, ovvero [J J] è un ideale di L.)

Teorema (Criterio di Cartan per la semisemplicità). *Sia L $\neq \underline{0}$ un'algebra di Lie. L è semisemplice se e solo se la sua forma di Killing è non-degenere.*

Dim. 1) Abbiamo già osservato che il radicale della forma di Killing è un ideale risolubile di L. Dunque, se L è semisemplice, la forma di Killing è non-degenere.
2) Supponiamo, inversamente, rad $\kappa = \underline{0}$. In forza dell'osservazione precedente, per provare che L è semisemplice basta provare che ogni ideale abeliano I di L è contenuto in rad κ. Siano dunque $x \in I$, $y \in L$. Allora $(ad\, x\; ad\, y)(L) \subseteq I$, donde $(ad\, x\; ad\, y)^2(L) \subseteq [I\, I] = \underline{0}$. Dunque ad x ad y è nilpotente, e quindi $\kappa(x,y) = Tr(ad\, x\; ad\, y) = 0$. Si conclude che $x \in$ rad κ , ovvero $I \subseteq$ rad $\kappa = \underline{0}$.

Osservazione : La parte 2) della dimostrazione resta valida anche se car F è diversa da zero. In altre parole, se la forma di Killing è non-degenere, un'algebra di Lie L su un qualsiasi campo algebricamente chiuso F è certamente semisemplice. L'inverso non è necessariamente vero.

Esercizi :

1) Un'algebra di Lie nilpotente ha forma di Killing identicamente nulla.
2) Un'algebra di Lie L è risolubile sse [LL] è contenuta in rad κ.
3) Sia L l'algebra non-abeliana di dimensione 2 su F (cf. I.2). L è risolubile e ha forma di Killing non-nulla.

4. Struttura delle algebre di Lie semisemplici

In II.2. abbiamo provato che un'algebra di Lie somma diretta di ideali semplici è semisemplice. In questo paragrafo proviamo che ogni algebra di Lie semisemplice ha una struttura cosiffatta, e qualcosa di più.

Ci serve il seguente :

Lemma 1. *Sia κ la forma di Killing di un'algebra di Lie L , e sia I un ideale di L. Si denoti con κ_I la forma di Killing definita su I (considerato come algebra di Lie) dalla restrizione $ad_{|I}$. Allora $\kappa_I = \kappa_{|IxI}$.*

Dim. Osserviamo innanzitutto che, se a è un endomorfismo di uno spazio finito-dimensionale V, e W è un sottospazio di V tale che $a(V) \subseteq W$, $Tr(a) = Tr(a_{|W})$ (basta guardare la matrice rappresentativa di a rispetto a una base di V che amplia una base di W). Siano $x,y \in I$. ad x ad y è un endomorfismo di L tale che (ad x ad y)(L) $\subseteq$ I. Dunque $\kappa_{|IxI}(x,y) = \kappa(x,y) = Tr(ad\, x\, ad\, y) = Tr((ad\, x\, ad\, y)_{|I}) = Tr((ad\, x)_{|I}(ad\, y)_{|I}) = \kappa_I(x,y)$.

Siamo ora in grado di provare il seguente teorema di struttura :

Teorema 1. *Sia L un'algebra di Lie semisemplice. Allora L è decomponibile nella somma diretta di ideali semplici $L_1, \dots, L_r$. Ogni ideale semplice di L coincide con uno degli L_i (dunque la decomposizione è unica, a meno dell'ordine). Inoltre, per ciascun $i = 1, \dots, r$, la forma di Killing di L_i coincide con la restrizione a L_i x L_i della forma di Killing di L.*

Dim. Sia κ la forma di Killing di L, e sia I un arbitrario ideale di L. Il sottospazio $I^\perp = \{x \in L \mid \kappa(x,y) = 0, \forall\, y \in I\}$ è un ideale di L. Infatti, per ogni $x \in I^\perp$, $y \in I$, $z \in L$, si ha : $\kappa([xz],y) = \kappa(x,[zy]) = 0$, poichè $[zy] \in I$. Ora, per definizione, per ogni $x \in I^\perp$ è $Tr(ad\, x\, ad\, y) = 0$ per ogni $y \in I$. Ne segue, applicando il Criterio di Cartan, che l'ideale $I \cap I^\perp$ di L è certamente risolubile, e quindi, per la semisemplicità di L, $I \cap I^\perp = \underline{0}$. D'altra parte, essendo κ non-degenere, dim I + dim $I^\perp$ = dim L (3., Proposizione 1). Si conclude che $L = I \oplus I^\perp$ (somma diretta di ideali).
Ciò posto, procediamo per induzione sulla dimensione di L (osservando che l'asserto è trivialmente vero se dim L $\leq$ 2, e L è necessariamente semplice se dim L = 3). Se L non ha ideali non-banali, allora L è semplice, e l'asserto è provato . Se L non è semplice, sia L_1 un ideale minimale non nullo di L. Per quanto visto sopra, $L = L_1 \oplus L_1^\perp$. In particolare, ogni ideale di L_1 è anche un ideale di L, e quindi, per la minimalità, L_1 è semplice. Per la stessa ragione, $L_1^\perp$ è un'algebra semisemplice. Allora, per induzione, $L_1^\perp$ si decompone in somma diretta di ideali semplici $L_2, \dots, L_r$, che sono anche ideali di L, e si ottiene dunque la richiesta decomposizione diretta di L.
Per quanto riguarda l'unicità della decomposizione, si osservi innanzitutto che, se I è un qualsiasi ideale semplice di L, [LI] è un ideale di I. Poichè $I \neq \underline{0}$
e $Z(L) = \underline{0}$, $[LI] \neq \underline{0}$, e la semplicità di I implica [LI] = I. Poichè $[LI] = [(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r) I] = [L_1 I] \oplus \cdots \oplus [L_r I]$, si deduce che nella precedente somma diretta uno solo degli addendi è non nullo, e coincide con I. Sia $[L_i I] = I$. Allora , essendo L_i un ideale di L, $I \subseteq L_i$, donde, per la semplicità di L_i , $I = L_i$.
Infine, l'ultima parte dell'enunciato segue dal Lemma precedente.

Corollario 1. *Sia L un'algebra di Lie semisemplice. Allora:*
i) L = [LL]
ii) Ogni ideale non nullo di L è somma diretta di ideali semplici di L
iii) Ogni ideale e ogni immagine epimorfa di L è semisemplice.

Dim. i) $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, somma diretta dei suoi ideali semplici L_i. Poichè $[L_i L_j] = \underline{0}$ se $i \neq j$, e $[L_i L_i] = L_i$, si ha $[LL] = [(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)(L_1 \oplus \cdots \oplus L_r)] = [L_1 L_1] \oplus \cdots \oplus [L_r L_r] = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r = L$.
ii) Sia I un ideale non-nullo di L. Allora $L = I \oplus I^{\perp}$, donde segue subito, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1, che I è semisemplice e quindi somma diretta di ideali semplici di L.
iii) Ci resta soltanto da provare che ogni immagine epimorfa di L è semisemplice. Ciò segue immediatamente dal fatto che, se $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$ come sopra, e J è un qualsiasi ideale di L, allora senza ledere la generalità $J = L_1 \oplus \cdots \oplus L_h$ per qualche h, e $L/J \cong L_{h+1} \oplus \cdots \oplus L_r$.

Osservazioni :

1) La decomposizione dell'algebra di Lie semisemplice L nella somma diretta dei suoi ideali semplici è L_i è *ortogonale* rispetto alla forma di Killing (i.e. gli ideali L_i sono mutuamente ortogonali rispetto a κ). Si noti infatti che da $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$ segue per l'unicità della decomposizione $L_1^{\perp} = L_2 \oplus \cdots \oplus L_r$. Dunque $L_1 \perp L_j$ ($j > 1$). Il discorso vale ovviamente per ogni L_i.

2) Il teorema di struttura afferma in particolare che, se L è un'algebra di Lie semisemplice, il modulo aggiunto di L è completamente riducibile. (Si noti che nella dimostrazione, dopo aver provato che $L = I \oplus I^{\perp}$ per ogni ideale I di L, si potrebbe invocare la Prop.1,I.4 per dedurre che L è somma diretta di ideali semplici.)

5. L'elemento di Casimir di una rappresentazione

Ricordiamo innanzitutto un altro fatto elementare di algebra lineare :

Sia V uno spazio vettoriale su un arbitrario campo F, f una forma bilineare simmetrica *non-degenere* su V, e sia $X = M_{\underline{b}}(f)$ la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\underline{b} = (v_1, \ldots, v_n)$ di V. Poichè X è non singolare, l'endomorfismo g di V tale che $M_{\underline{b}}(g) = X$ è invertibile, e pertanto esiste una e una sola base $\underline{b}^* = (u_1, \ldots, u_n)$ di V tale che $g(u_j) = v_j$ per $j = 1, \ldots, n$, ovvero tale che, per ogni $i, j = 1, \ldots, n$, posto $u_j = \sum u_{jr} v_r$, sia $f(v_i, u_j) = f(v_i, \sum u_{jr} v_r) = \sum u_{jr} f(v_i, v_r) = \sum x_{ir} u_{jr} = \delta_{ij}$. La base $\underline{b}^* = (u_1, \ldots, u_n)$, tale che $f(v_i, u_j) = \delta_{ij}$, prende il nome di ***base duale*** della base $\underline{b}$ rispetto alla forma f.

Sia L un'algebra di Lie sul campo F, e sia f una forma bilineare simmetrica definita su L, *non-degenere* e *associativa* (i.e. : $f([xy],z) = f(x,[yz])$ $\forall\, x,y,z \in L$). Sia $\underline{b} = (x_1, \ldots, x_n)$ una base di L, e sia $\underline{b}^* = (y_1, \ldots, y_n)$ la base duale di $\underline{b}$ rispetto a f.
Se $x \in L$, sia $[x\, x_i] = \sum a_{ij} x_j$, $[x\, y_i] = \sum b_{ij} y_j$. Allora, posto $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, è $A = -B^t$. Infatti, per ogni i,k, si ha : $a_{ik} = \sum_j a_{ij} \delta_{jk} = \sum_j a_{ij} f(x_j, y_k) = f([x\, x_i], y_k) = f(-[x_i\, x], y_k) = f(x_i, -[x y_k]) = -\sum_j b_{kj} f(x_i, y_j) = -\sum_j b_{kj} \delta_{ij} = -b_{ki}$ (usando l'associatività di f).
Sia $\phi : L \to gl(V)$ una qualsiasi rappresentazione di L, e si ponga :

$$c_\phi(f) = \sum_i \phi(x_i)\, \phi(y_i)\,.$$

Evidentemente, $c_\phi(f) \in End(V)$. Tenendo conto del fatto che in End(V) vale l'identità :

$$[x,yz] = [x,y]\, z + y\, [x,z]\,,$$

verifichiamo che, con le notazioni usate sopra, si ha per ogni $x \in L$:

$[\phi(x),c_\phi(f)] = [\phi(x), \sum_i \phi(x_i)\,\phi(y_i)] = \sum_i [\phi(x),\phi(x_i)\,\phi(y_i)] = \sum_i([\phi(x),\phi(x_i)]\cdot\phi(y_i) + \phi(x_i)[\phi(x), \phi(y_i)]) = \sum_i \phi([x\,x_i])\phi(y_i) + \sum_i \phi(x_i)\phi[x\,y_i] = \sum_{ij} a_{ij}\,\phi(x_j)\cdot\phi(y_i) + \sum_{ij} b_{ij}\,\phi(x_i)\phi(y_j) = 0$ (essendo $a_{ij} = -b_{ji}$ $\forall i,j$).

In altre parole, *$c_\phi(f)$ è un endomorfismo di V che commuta con tutti gli elementi di $\phi(L)$.*

Sia ora L *semisemplice* , $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione *fedele* di L (i.e. Ker $\phi = \underline{0}$), e $\kappa_\phi :\ L \times L \to F$ la corrispondente forma traccia : $\kappa_\phi(x,y) = Tr(\phi(x)\phi(y))$ $\forall\, x,y \in L$.
Poichè κ_ϕ è *associativa* , rad $\kappa_\phi \cong \phi(\text{rad}\,\kappa_\phi)$ è un ideale risolubile di L (cf.3., Lemma 1). Pertanto la semisemplicità di L implica che *κ_ϕ è non-degenere.* (In particolare, se ϕ = ad (fedele poichè Ker ad = Z(L) = $\underline{0}$!) $\kappa_\phi = \kappa$, la forma di Killing di L.)
Possiamo dunque applicare i risultati precedenti a κ_ϕ . Fissata una base $\underline{b} = (x_1 , . . . , x_n)$ di L, scriviamo semplicemente c_ϕ per $c_\phi(\kappa_\phi)$:

Definizione 1. *Diremo che* c_ϕ *è l'* **elemento di Casimir** *della rappresentazione* ϕ.

Lemma 1. *Se $\phi : L \to gl(V)$ è irriducibile, allora c_ϕ = (dim L/dim V)I_V.*
(In particolare, c_ϕ è indipendente dalla scelta della base $\underline{b}$ in L.)

Dim. Per il Lemma di Schur, poichè c_ϕ commuta con tutti gli elementi di $\phi(L)$, c_ϕ è uno scalare, cioè $c_\phi = \lambda I_V$, $\lambda \in F$. D'altra parte, si ha $Tr(c_\phi) = \sum_i Tr(\phi(x_i)\,\phi(y_i)) = \sum_i \kappa_\phi(x_i ,y_i) = \sum_i 1 = \dim L$. Dunque dim $V\cdot\lambda$ = dim L, e si ha l'asserto.

Esempio 1. Siano L = sl(2,F), V = F^2, $\phi : L \to gl(V)$ la rappresentazione naturale di L su V data dalla mappa d'inclusione (che si verifica facilmente essere irriducibile), e κ_ϕ la forma traccia $\kappa_\phi(u,v) = Tr(uv)$ definita su L.

Se $\underline{b}$ = (x, y, h) è la base standard di L, i.e. $x = e_{12}$, $y = e_{21}$, $h = e_{11} - e_{22}$, la matrice di κ_ϕ è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, e

la base duale di $\underline{b}$ rispetto a κ_ϕ è $\underline{b}$ = (y, x, $\frac{1}{2}$h). Pertanto $c_\phi = xy + yx + \frac{1}{2}h^2 = \frac{3}{2}I_V$ (ove $\frac{3}{2}$ = dim L/dim V).

Esempio 2. Siano L = sl(2,F), V = L, ϕ = ad (la rappresentazione aggiunta), $\kappa_\phi = \kappa$ la forma di Killing., e $\underline{b}$ come sopra la base standard. Allora, rispetto a $\underline{b}$, è : ad x = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ad y = $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ad h = diag(2, -2, 0). E' facile calcolare la matrice di κ : X = $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. La base duale di $\underline{b}$ (come è già evidente osservando la forma di X) è allora $\underline{b}^* = (\frac{1}{4}y, \frac{1}{4}x, \frac{1}{8}h)$.

Notiamo che, essendo L semplice, ad è fedele. L'elemento di Casimir di ad è $c_{ad} = \text{ad } x \text{ ad } \frac{1}{4}y + \text{ad } y \text{ ad } \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\text{ad}^2 h = I_V$ (si noti che $V = L$ e quindi dim L/dim V = 1).

Osservazione 1. Si può provare che, se L è un'algebra semplice, due qualsiasi forme bilineari simmetriche non-degeneri e associative su L differiscono per uno scalare. Poichè sl(n,F) (come si proverà più avanti) è un'algebra semplice, utilizzando questo risultato si può provare in generale che la forma traccia della rappresentazione naturale di sl(n,F) è legata alla forma di Killing dalla relazione : $\kappa(u,v) = 2n\mathrm{Tr}(uv)$.

Osservazione 2. Se L è un'algebra semisemplice, e $\phi : L \to gl(V)$ è una rappresentazione *non fedele* di L su V, Ker ϕ è un ideale di L, e pertanto è somma di ideali semplici di L. Sia $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$, Ker $\phi = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$, $L' = L_{s+1} \oplus \cdots \oplus L_r$, ove gli L_i sono gli ideali semplici di L. La restrizione $\phi|_{L'}$ è una rappresentazione fedele di L', e quindi a L' possiamo applicare tutte le argomentazioni precedentemente svolte per L. Considerando basi duali di L', si ottiene un elemento di End(V) che commuta con tutti gli elementi di $\phi(L') = \phi(L)$, che si chiama ancora l' *elemento di Casimir di* ϕ, denotandolo con c_ϕ .

6. Il Teorema di Weyl

In questo paragrafo proveremo che ogni rappresentazione di un'algebra di Lie *semisemplice* L su uno spazio finito-dimensionale $V \neq \underline{0}$ (ovvero, equivalentemente, ogni L-modulo $V \neq \underline{0}$) è *completamente riducibile.*
E' questo un classico teorema di H. Weyl . La dimostrazione originaria di Weyl, basata sul cosiddetto "trucco unitario", fa uso dell'integrazione su gruppi compatti di Lie . Solo molto più tardi Casimir e van der Waerden ne pubblicarono una dimostrazione puramente algebrica , della quale daremo una versione dovuta a J.P. Serre .

Sono indispensabili due lemmi preliminari:

Lemma 1. *Siano V, W due L-moduli su un arbitrario campo F, e si consideri lo spazio vettoriale Hom(V,W) delle applicazioni lineari da V a W. Si dà a Hom(V,W) la struttura di L-modulo ponendo, per ogni $x \in L$, $f \in$ Hom(V,W), $v \in V$:*

$$(xf)(v) = xf(v) - f(xv) .$$

Dim. Si verifica subito che $xf \in$ Hom(V,W), e che gli assiomi i), ii), iii) della definizione di L-modulo (cfr. I.4) sono soddisfatti. In particolare : $([xy]\ f)(v) = [xy]\ f(v) - f([xy]\ v) = xyf(v) - yxf(v) - f(xyv - yxv) = xyf(v) - f(xyv) - (yxf(v) - f(yxv)) = (xyf)(v) - (yxf)(v) = (xyf - yxf)(v)$. Ovvero: $[xy]\ f = xyf - yxf$, così che iii) è soddisfatto.

Lemma 2. *Sia $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione di un'algebra di Lie semisemplice L. Allora $\phi(L) \subseteq sl(V)$.*

Dim. Sappiamo (cf. 4., Corollario) che L = [LL] , ovvero che ogni elemento di L è combinazione lineare di brackets [xy]. Poichè $\phi[xy] = [\phi(x),\phi(y)] = \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x)$ ha traccia nulla, segue l'asserto.

Osservazione. Segue in particolare dal Lemma 2 che, se dim V = 1, L opera banalmente su V, i.e. $\phi(x)(V) = \underline{0}$ $\forall\, x \in L$. (In altre parole : *l'unico L-modulo 1-dimensionale, ovvero l'unico carattere di L, è quello banale* .)

Teorema (H.Weyl). *Sia L semisemplice e sia $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione di L su uno spazio finito-dimensionale $V \neq \underline{0}$. Allora ϕ è completamente riducibile.*

Dim. Proveremo che ogni L-sottomodulo di V ha un complemento.

1) Consideriamo il *caso particolare* in cui V contiene un L-sottomodulo U di codimensione 1, e proviamo che allora U ammette un complemento.
Per induzione su dim V (essendo l'asserto banale se dim V = 1) :
Innanzitutto notiamo che, per l'osservazione che segue il Lemma 2, L opera banalmente sullo spazio quoziente V/U, così che possiamo senza ambiguità denotare V/U semplicemente con F, e considerare la sequenza esatta di L-moduli :

$$\underline{0} \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} F \to 0$$

(ove i denota l'iniezione canonica di U in V, e π denota la projezione canonica di V su F = V/U). Si tratta di provare che questa sequenza si spezza.
Proviamo in primo luogo che ciò accade se U è *riducibile* .
Sia dunque U' un sottomodulo non-banale di U. Consideriamo la sequenza esatta $\underline{0} \to U/U' \to V/U' \to F \to 0$. Per l'ipotesi d'induzione, questa sequenza si spezza, i.e. U/U' ammette un complemento (1-dimensionale) in V/U'. Sia U°/U' un tale complemento. Abbiamo allora anche la sequenza esatta $\underline{0} \to U' \to U° \to F \to 0$, e sempre per induzione U' avrà un complemento (1-dimensionale) X in U°. Dunque $U° = U' \oplus X$. D'altronde, è: (*) $V/U' = U/U' \oplus U°/U'$. Ne segue $U \cap X = \underline{0}$ (In caso contrario, X e quindi U° sarebbe contenuto in U, e (*) darebbe U° = U'). Si conclude che $V = U \oplus X$.
Siamo dunque ridotti a supporre U *irriducibile* . Posto $L = \mathrm{Ker}\,\phi \oplus L'$, e osservato che gli L-sottomoduli di V sono tutti e soli gli L'-sottomoduli di V, consideriamo l'elemento di Casimir $c = c_\phi$ di ϕ (relativo a una coppia di basi duali di L'). Poichè c commuta con ogni elemento di $\phi(L') = \phi(L)$, c è un endomorfismo di V come L-modulo (in altre parole, $c(xv) = c(\phi(x)v) = \phi(x)(cv) = x(cv)$, $\forall\, x \in L$, $v \in V$) . In particolare, Ker c è un L-sottomodulo di V. D'altronde , essendo $c = \sum_i \phi(x_i)\cdot\phi(y_i)$, $cU \subseteq U$. Dunque c opera su V/U , e dal momento che L opera banalmente su V/U , anche c opera banalmente su V/U . In altre parole, $c(V) \subseteq U$. Essendo U irriducibile , il Lemma di Schur assicura che $c|_U$ è uno scalare, i.e. $c|_U = \lambda\cdot I_U$, $\lambda \in F$. Poichè Tr(c) = dim L' (cf. 5. , Lemma 1) , e d'altra parte $Tr(c) = Tr(c|_U) = \lambda \cdot \dim U$, segue $\lambda \neq 0$. Si conclude che $U \cap \mathrm{Ker}\, c = \underline{0}$, e Ker c è un complemento di U, come richiesto.

2) Veniamo ora al *caso generale*.
Sia $\underline{0} \neq U$ un qualsiasi sottomodulo di V, e si consideri lo spazio Hom(V,U) munito della struttura di L-modulo descritta nel Lemma 1. Sia poi E il sottoinsieme di Hom(V,U) costituito dalle applicazioni lineari f tali che $f|_U$ è uno scalare. E è chiaramente un sottospazio di Hom(V,U), anzi è un L-sottomodulo. Sia infatti $f|_U = \lambda\cdot I_U$. Allora, per $x \in L$, $u \in U$, si ha $(xf)u = xf(u) - f(xu) = x(\lambda u) - \lambda(xu) = 0$, i.e. $(xf)|_U = 0_U$. Sia ora E_o il sottospazio di E costituito dalle f tali che $f|_U = 0_U$. Il calcolo sopra eseguito mostra che E_o è anch'esso un L-sottomodulo di Hom(V,U), e che $xE \subseteq E_o$. Inoltre, se $f, f' \in E$, con $f|_U = \lambda\cdot I_U$, $f'|_U = \mu\cdot I_U$, è $\lambda f' - \mu f \equiv 0 \pmod{E_o}$, così che $\dim (E/E_o) = 1$. Siamo così ricondotti alla situazione del caso 1), e possiamo quindi affermare che E_o ammette un complemento $W = \langle f \rangle$ in E. (Senza ledere la generalità possiamo supporre $f|_U = I_U$.) Poichè W è 1-dimensionale , l'azione di L su W non può che essere quella banale , cioè $xf = 0$, $\forall\, x \in L$. Ma ciò significa semplicemente che , $\forall\, x \in L$, $v \in V$, è $(xf)(v) = xf(v) - f(xv) = 0$, ovvero che f è un omomorfismo di L-moduli da V a U. Pertanto Ker f è un sottomodulo di V. Poichè $f|_U = I_U$, $f(V) = U$ e $U \cap \mathrm{Ker}\, f = \underline{0}$. Si conclude che $V = U \oplus \mathrm{Ker}\, f$, e Ker f è il richiesto complemento di U.

7. Decomposizione astratta di Jordan degli elementi di un'algebra semisemplice.

In questo paragrafo mostreremo come sia possibile definire , per ogni elemento x di un'algebra di Lie semisemplice L , una decomposizione "astratta" di Jordan , compatibile con la decomposizione di Jordan di $\phi(x)$ in una qualsiasi rappresentazione ϕ di L .

Ricordiamo innanzitutto che, per una qualsiasi algebra di Lie L , *ad L è un ideale dell'algebra delle derivazioni Der(L)* (cf. I.3.).

Si ha il seguente :

Teorema 1. *Sia L un'algebra di Lie semisemplice . Allora ad L = Der(L) (ovvero: ogni derivazione di L è interna) .*

Dim. Poichè Z(L) = Ker ad = $\underline{0}$, ad L è isomorfa a L , e dunque la forma di Killing di ad L, κ_{adL} , è non-degenere . Sia U = (ad L)$^\perp$ l'ortogonale di ad L in Der(L) rispetto alla forma di Killing $\kappa_{Der(L)}$ di Der(L) . Poichè ad L è un ideale di Der(L) , e $\kappa_{Der(L)}$ è associativa , U è anch'esso un ideale di Der(L) , così che [ad L , U] $\subseteq$ ad L $\cap$ U. D'altronde (v.4., Lemma) κ_{adL} è la restrizione a ad L di $\kappa_{Der(L)}$, e pertanto, essendo κ_{adL} non-degenere, ad L $\cap$ U = $\underline{0}$. Dunque [ad L , U] = $\underline{0}$, e poichè, $\forall$ x $\in$ L, $\delta \in$ Der(L), è ad(δx) = [δ, ad x] , se $\delta \in$ U si ha ad(δx) = 0, donde, essendo ad iniettiva, δx = 0, ovvero δ = 0. Si conclude che U = (ad L)$^\perp$ = $\underline{0}$. A fortiori, rad $\kappa_{Der(L)}$ = $\underline{0}$, ovvero Der(L) è semisemplice. Ma allora Der(L) = ad L $\oplus$ (ad L)$^\perp$, e dunque Der(L) = ad L .

Il teorema precedente permette di definire una *decomposizione astratta di Jordan* in un'algebra semisemplice L, nel modo seguente :

Sia x $\in$ L , e sia ad x = $(\mathrm{ad}\ x)_s + (\mathrm{ad}\ x)_n$ l'usuale decomposizione di Jordan di ad x (in End(L)) . Poichè (cf. 1. , Proposizione 2.) $(\mathrm{ad}\ x)_s$ e $(\mathrm{ad}\ x)_n$ sono derivazioni , e per il Teorema 1 Der(L) = ad L , esistono (univocamente determinati da x in forza dell'iniettività di ad) $x_s , x_n \in L$ tali che $(\mathrm{ad}\ x)_s$ = ad x_s , $(\mathrm{ad}\ x)_n$ = ad x_n . E' dunque $x = x_s + x_n$, con x_s *ad-semisemplice* (i.e. ad x_s semisemplice) , x_n *ad-nilpotente* , e $[x_s , x_n] = 0$ (essendo ad $[x_s , x_n]$ = [ad x_s , ad x_n] = 0) . Notiamo esplicitamente che tale decomposizione di x è *unica* , nel senso che se x = s + n, con s $\in$ L ad-semisemplice, n $\in$ L ad-nilpotente, e [s n] = 0, allora ad x = ad s + ad n è la usuale decomposizione di Jordan di ad x ; dunque ad s = ad x_s , ad n = ad x_n , donde s = x_s , n = x_n .

Definizione 1. *Diremo che* $x = x_s + x_n$ *è la* **decomposizione astratta di Jordan** *di x , e (per abuso di linguaggio) che* x_s *e* x_n *sono , rispettivamente , la* **parte semisemplice** *e la* **parte nilpotente** *di x .*

Naturalmente , la definizione precedente sarebbe fonte di confusione se , essendo L lineare , la decomposizione astratta di un elemento di L differisse dalla sua usuale decomposizione di Jordan . Che questo non sia il caso , lo assicura un'importante conseguenza del Teorema di Weyl :

Teorema 2. *Sia L $\subseteq$ gl(V) semisemplice (dim V < ∞) . Allora, per ogni x $\in$ L , la parte semisemplice e la parte nilpotente di x (considerato come endomorfismo di V) appartengono a L . In particolare, la decomposizione astratta e la decomposizione usuale di Jordan di x coincidono.*

Dim. Sia x un elemento di L, e sia $x = x_s + x_n$ la sua decomposizione di Jordan in gl(V). Si tratta di provare che x_s e x_n appartengono entrambi a L. Sia ad = $\mathrm{ad}_{gl(V)}$. Poichè ad x = ad x_s + ad x_n è la decomposizione di Jordan di ad x in End(End(V) (cf. 1. Corollario 2), e (ad x)L = [x , L] $\subseteq$ L, segue da 1. Teorema 1, iii) che (ad x_s)L $\subseteq$ L e (ad x_n)L $\subseteq$ L. In altre parole, x_s e x_n appartengono al normalizzante N di L in gl(V). N è una sottoalgebra di gl(V) che contiene L come un ideale. Tuttavia N $\neq$ L, poichè contiene tutti gli scalari, mentre L $\subseteq$ sl(V) contiene solo lo scalare nullo. Cerchiamo allora una sottoalgebra di N che contenga L, x_s e x_n , ed escluda gli scalari. A tale scopo, per ogni L-sottomodulo U di V, definiamo $S_U = \{y \in gl(V) \mid y(U) \subseteq U, Tr(y_{|U}) = 0\}$. Notiamo che, $\forall$ y,z $\in$ L , $[y, z]_{|U} = [y_{|U} , z_{|U}]$ ha traccia nulla, e pertanto appartiene a S_U. Poichè L = [L,L] , ne segue che S_U è una sottoalgebra di gl(V) contenente L. Sia allora $M = N \cap (\cap_U S_U)$. M è una sottoalgebra di N che contiene L come ideale ed esclude gli scalari, dacché S_V = sl(V). Notiamo ancora che, poichè per ogni x $\in$ L, se U è un L-sottomodulo di V si ha x(U) $\subseteq$ U, segue sempre da 1. Teorema 1, iii) che si ha anche $x_s(U) \subseteq U$ e $x_n(U) \subseteq U$. Inoltre, $Tr(x_{n|U}) = 0$, essendo $x_{n|U}$ nilpotente, donde anche $Tr(x_{|U}) = Tr(x_{s|U}) = 0$. Si conclude che x_s e x_n appartengono a M.

Proviamo che M = L . A tale scopo, osserviamo che, rispetto all'azione x·m = [x,m] , $\forall$ x $\in$ L, m $\in$ M, M è un L-modulo (di dimensione finita) contenente L come sottomodulo. Pertanto, per il Teorema di Weyl, vi è un sottomodulo P di M tale che M = L $\oplus$ P. E poichè L è un ideale di M , [L,P] $\subseteq$ L $\cap$ P = $\underline{0}$, ovvero l'azione di L